

Estudi de classes, un model de formació per millorar la gestió de l'aula de matemàtiques

Jordi Deulofeu

jordi.deulofeu@uab.cat

XXI Jornada Lleimat

'Compartim matemàtiques'

Dissabte, 3 de febrer
de 9.00 h a 14.00 h



Universitat de Lleida
Institut de Ciències
de l'Educació



Un model de formació

- Una formació que pretengui ser transformadora ha de partir de la realitat de l'aula, de les problemàtiques dels docents, no deslligada de la seva realitat i, sobretot, que tingui com a objectiu principal la millora de l'acció docent dels participants.
- Per això, cal donar rellevància a models de formació que s'ocupen directament dels processos d'ensenyament-aprenentatge, centrant-se preferentment en dos punts: la gestió que fa el docent de l'aula i l'aprenentatge que es produeix en el procés.
- Aquesta formació hauria d'incloure una pràctica real de classe, l'experimentació i l'observació directa de la gestió que fa el docent i de l'aprenentatge de l'alumnat, i tenir com a finalitat la formulació de propostes de millora.

Estudi de classes (*Lesson Study*)

L'estudi de les classes (de matemàtiques) és un model de desenvolupament professional del professorat basat en una formació - acció col·laborativa que consisteix en el disseny i l'experimentació d'una activitat d'aula, l'observació de la mateixa i la seva anàlisi crítica per a finalitzar amb una proposta de millora. Sol comptar amb acompanyament d'un expert, especialment quan es fa per primera vegada.

Les fases d'un cicle d'estudi de classes

Planificació.

Elaboració activitat a experimentar i del registre d'observació.

Experimentació i observació de l'activitat.

Observació sistemàtica de la classe: gestió del professor experimentador i aprenentatge de l'alumnat participant.

Reflexió, anàlisi i propostes de millora.

Anàlisi, a partir d'una pauta d'observació, del funcionament de la classe, de l'adequació de l'activitat dissenyada i de l'impacte d'aquesta en l'aprenentatge de l'alumnat.

Algunes idees clau

Es poden fer estudis de classe diferents, però algunes idees que han de ser sempre presents en aquest model de formació són:

- Formació entre iguals (implicació i coresponsabilitat)
- Participació activa de tots els assistents, desenvolupant cadascú el seu rol de manera profunda
- Focalització en l'aprenentatge: tant el de l'alumnat com el del professorat
- Anàlisi crítica i constructiva (sense jutjar) per aportar propostes de millora

Els rols dels participants

Moderador: Convoca i modera les sessions, assenyalant els objectius de cada sessió i les produccions que cal elaborar.

Experimentador: Es fa seva la guia de l'activitat (classe) a experimentar (objectius, tasques concretes, gestió), fa la classe i participa en el debat posterior justificant la seva actuació.

Observador(s): Ajusten la pauta d'observació, l'apliquen a la classe observada i aporten les reflexions sobre l'experimentació.

Secretari. Recull les reflexions i decisions preses pel grup en relació amb l'activitat a experimentar, la pauta d'observació i les propostes de millora.

Elecció de l'activitat: alguns exemples

Un problema de nombres: Maximitzar / minimitzar

Amb els nombres 4, 5, 6, 7, 8, 9 es poden formar dos nombres de tres xifres sense repetir-ne cap (emprant tots els dígitos una sola vegada).

Podem fer diverses preguntes sobre quins seran els dos nombres (i quantes solucions hi haurà) per tal de maximitzar / minimitzar el resultat d'operar-los (suma, resta, multiplicació). Per exemple:

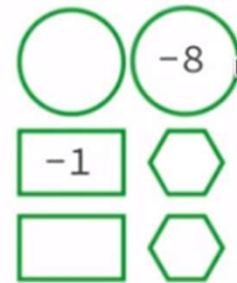
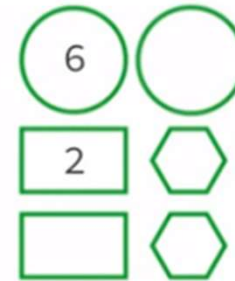
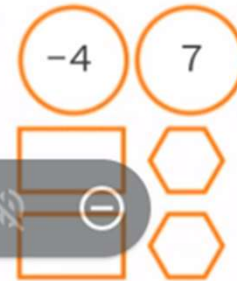
- a) Quin parell de nombres podem trobar de manera que la seva suma sigui el nombre més gran (o més petit) possible?
- b) Quin parell de nombres podem trobar de manera que la seva diferència sigui el nombre més gran (o més petit) possible?
- c) Quin parell de nombres es podem trobar de manera que tant la seva suma com el seu producte sigui el nombre més gran (més petit) possible?

Pràctica productiva amb nombres (I)

un exemple per a 1r d'ESO

Omple els diagrames següents.

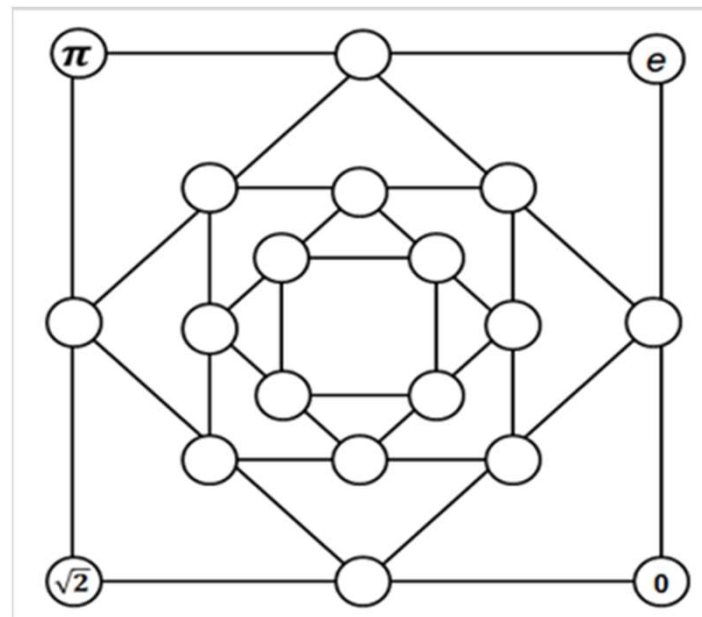
- Dins dels cercles hi poden anar 2 nombres qualssevol.
- Dins dels rectangles, hi ha d'anar la suma dels 2 nombres de la fila anterior.
- Dins dels hexàgons, hi ha d'anar la resta dels 2 nombres de la fila anterior (sempre utilitzant com a minuend el de l'esquerra).



A: <https://nrich.maths.org/9958> trobareu varis models pels enters

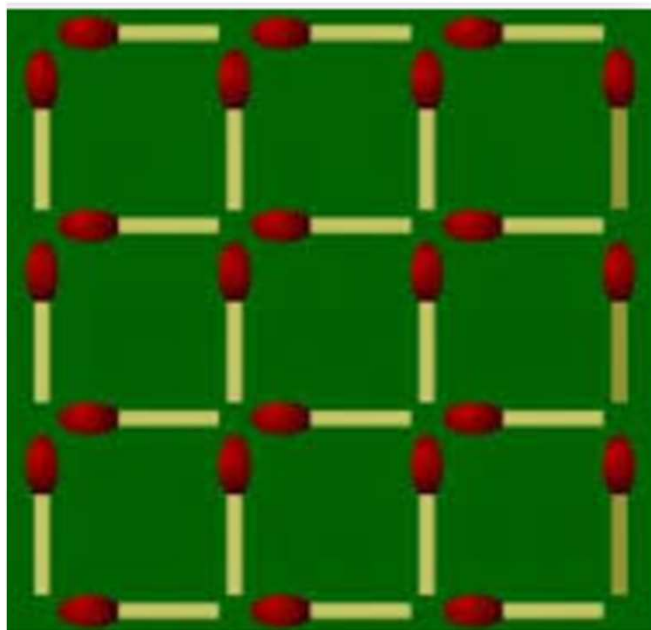
Pràctica productiva amb nombres (II)

Escriviu 4 nombres en els vèrtex del quadrat gran. Resteu (gran menys petit) i anoteu el resultat al punt mig del costat. Repetiu el procediment per anar omplint els cercles del dibuix. Podeu fer-ho amb nombres naturals, amb enters, amb racionals i amb irracionals

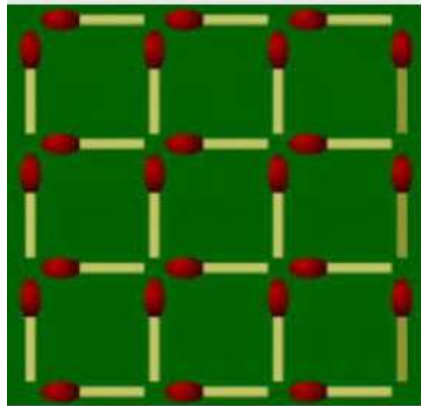


Un problema de comptar, cercar patrons, generalitzar

Trobeu diferents maneres de comptar els llumins i generalitzeu

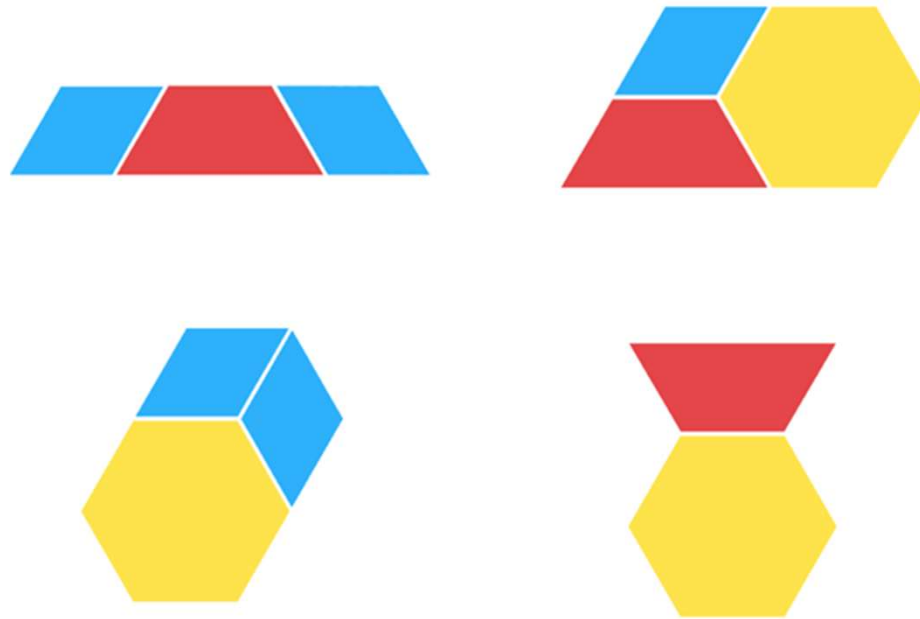


Dels recomptes a la generalització i, si s'escau, a la seva expressió algebraica



- $3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 = 2 \cdot 3 \cdot 4$ (files i columnes)
- $(2 + 4 + 6) \cdot 2$ (escales)
- $3 \cdot 4$ (perímetre) + $4 \cdot 2$ (creus interiors) + $2 \cdot 2$
- $4 \cdot 4$ (quadrats unitaris a cada vèrtex) + 4 (quadrat unitari central) + 4 (centre de cada costat del quadrat gran)
- Altres...

Un exemple de Queli (WODB)



Tenir més de 4 costats (elimina la 1)
Tenir 2 o més parells de costats paral·lels (elimina 1)
Tenir un àrea superior a $8 u^2$ (elimina la 1)



Tenir un nombre parell de costats (elimina la 2)
Conté figures només de dos colors (elimina la 2)
Tenir exactament un eix de simetria (elimina la 2)



Tenir el mateix perímetre – $9u$ - (elimina la 3)
Tenir algun angle agut (elimina la 3)
No tenir tots els angles iguals (elimina la 3)



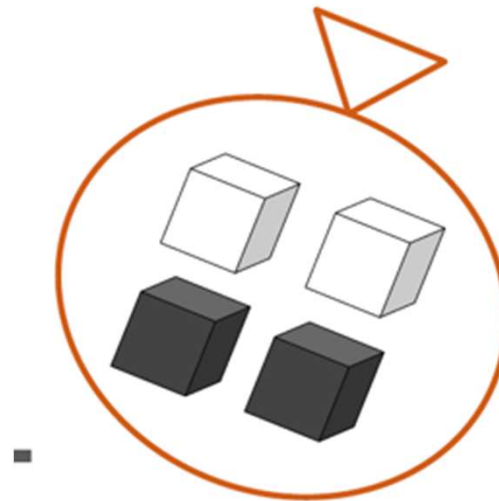
Ser un polígon convex (elimina la 4)
Tenir angles superiors a 180° (elimina la 4)
No tenir tres o més costats paral·lels (elimina la 4)



Conjectura, experimentació i validació

En una bossa posem dos parelles de cubs de colors diferents.
Si traiem dos cubs de la bossa, què és més probable?

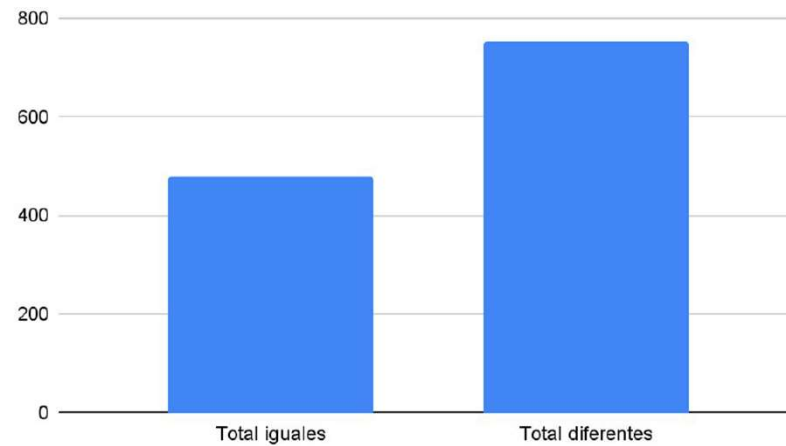
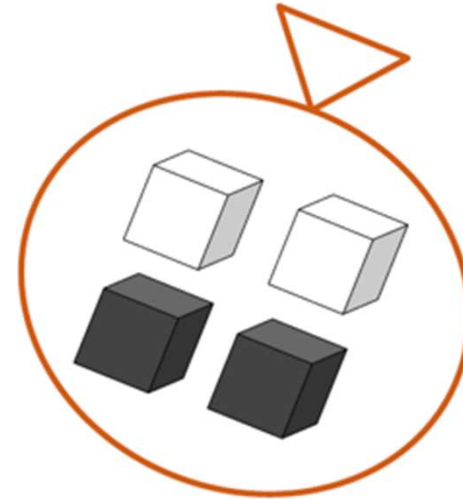
- a) que surtin del mateix color
- b) que surtin de diferent color?
- c) és igual de probable



(1) Conjecturem i expliquem la conjectura









Experimentem

- Fem extraccions (10 cadascú)
- Posem en comú els resultats de l'experimentació (ajuntem)



Expliquem el resultat, refem la conjectura i validem

- Cal modificar la conjectura?
- Podem explicar els resultats de manera "teòrica"?

				
		=	≠	≠
	=		≠	≠
	≠	≠		=
	≠	≠	=	

$$P(=) = 4/12 = 1/3$$

$$P(\neq) = 8/12 = 2/3$$

Un full del calendari: febrer 2024

Dilluns	Dimarts	Dimecres	Dijous	Divendres	Dissabte	Diumenge
			1	2	3	4
5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29			

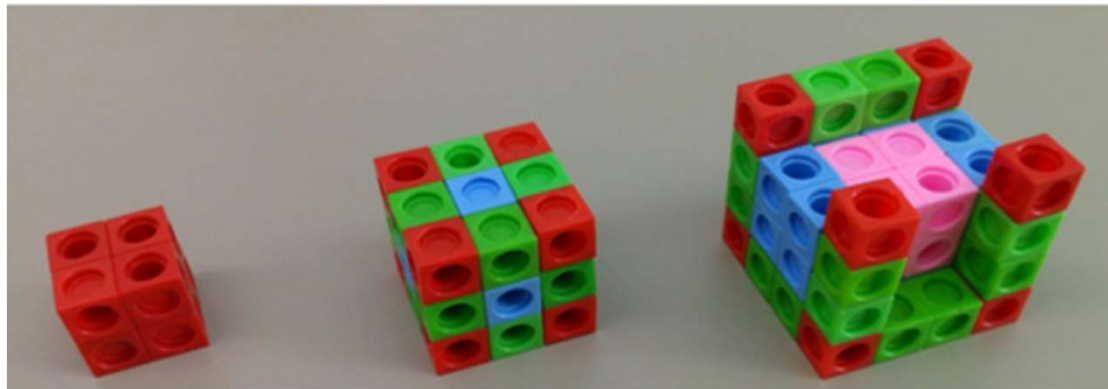
Què podem fer?

- Mirar-la com un tot, les seves característiques, informacions que se'n deriven,...
- Mirar-la com el que és: el full del calendari del mes de febrer de 2024 (anys de traspàs, etc...)
- Mirar-la com una taula de nombres (problemes numèrics i recreacions associades a qualsevol taula numèrica)

Pintant cubs: Una activitat de síntesi (geometria, recomptes, funcions)

Disposem de cubs petits tots iguals d'aresta 1 unitat i amb ells construïm cubs més grans (d'aresta 2, 3, 4 unitats i en general d'aresta n). Pintem la superfície exterior dels diferents cubs. Si desfem cada cub gran veurem que tenim cubs petits amb 3 cares pintades, amb 2, amb 1 i amb 0 cares pintades.


- Troba el nombre de cubs petits de cada tipus, en els cubs d'aresta 2, 3 i 4 unitats. Com va creixent el nombre de cubs?
- Com calcularies el nombre de cubs petits de cada tipus en un cub d'aresta 10 unitats
- Si anomenem n a la mesura de l'aresta del cub, expressa en funció de n el nombre de cubs de cada tipus i verifica que la seva suma és el nombre total de cubs.



Una activitat de síntesi: cap a la solució

La seva generalització és un bon exemple de diferents funcions polinòmiques, des de la funció constant a la de tercer grau.

	Arista 2cm	Arista 3cm	Arista 4cm	Arista 10cm	Arista n cm
3 caras pintadas	8	8	8	8	8
2 caras pintadas	0	12	24	$12(10-2)$	$12(n-2)$
1 cara pintada	0	6	24	$6(10-2)^2$	$6(n-2)^2$
0 caras pintadas	0	1	8	$(10-2)^3$	$(n-2)^3$
Total	8	27	64	10^3	n^3



Una situació / problema

Un problema per experimentar, conjecturar i justificar

Un grup de 5 persones, després de realitzar un robatori, van a un hotel i ocupen 5 habitacions seguides en una mateixa fila del primer pis de l'hotel. Un dels lladres es queda l'objecte robat i l'amaga a la seva habitació.

Com que les habitacions es comuniquen decideixen que si la policia escorcolla una habitació, i no troba l'objecte, l'amagaran en una altra habitació al costat de la que estava amagada (pot ser a una banda o a l'altra). Si la policia busca en una altre habitació, tornaran a canviar l'objecte de lloc, sempre a una habitació contigua.

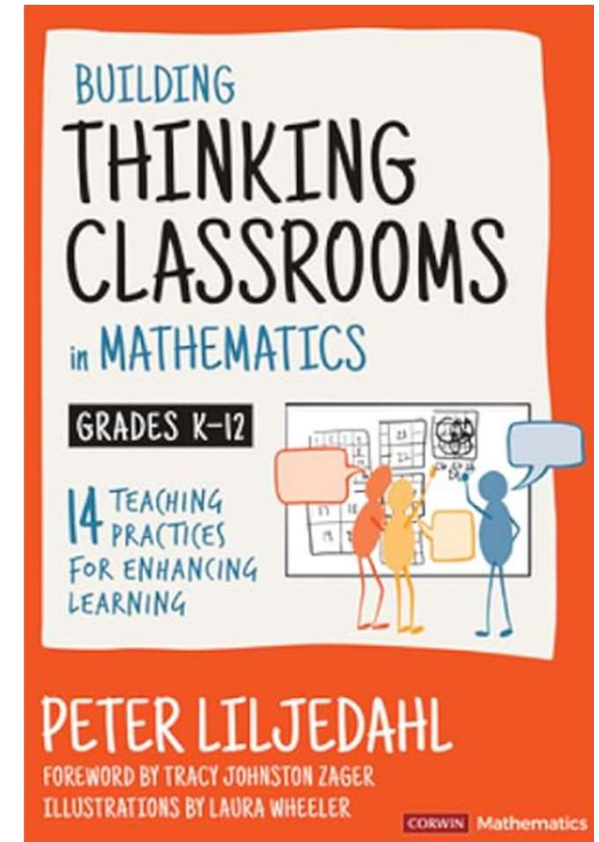
Podrà la policia recuperar l'objecte robat sempre?

Quines, en quin ordre i quantes habitacions caldrà escorcollar per tenir la seguretat de recuperar l'objecte?

La situació anterior està estreta de:

Liljedahl, P. (2020). *Building Thinking Classrooms in Mathematics. Grades K-12*. California: Corwin Press (Sage, Pub)

A partir de la situació / problema dissenyem l'activitat per l'aula i la seva gestió. Segons Liljedahl els punts a tenir més en compte son:





En què
ens
fixarem?

BUILDING THINKING CLASSROOMS: CONDITIONS FOR PROBLEM SOLVING

Peter Liljedahl, Simon Fraser University, Canada

Peter Liljedahl tria els 9 punts següents per a la seva recerca:

1. the type of tasks used, and when and how they are used;
2. the way in which tasks are given to students;
3. how groups are formed, both in general and when students work on tasks;
4. student work space while they work on tasks;
5. room organization, both in general and when students work on tasks;
6. how questions are answered when students are working on tasks;
7. the ways in which hints and extensions are used while students work on tasks;
8. when and how a teacher levels² their classroom during or after tasks;
9. and assessment, both in general and when students work on tasks.

Del problema a l'activitat per a l'aula

Què podem fer per transformar un problema en una activitat per l'aula?

- Analitzem/resolem el problema des del punt de vista matemàtic.
- Què es pot treballar en la resolució del problema?
- Pensem si el context és prou adequat o és millor canviar-lo.
- Pensem si és millor presentar el problema amb més/menys informació, o bé si cal formular un cas més senzill o més general, d'acord amb l'alumnat on es farà la classe.
- Redactem l'activitat per l'aula (dividida en tasques, si s'escau) i dissenyem una gestió de la classe.



L'observació de l'aula

Cap a una pauta d'observació

Un punt rellevant de l'estudi de classes és l'observació de l'aula per part de companys.

Per a això construïm una pauta d'observació *ad hoc* centrada en tres punts:

- Sobre l'activitat (i les tasques que la conformen)
- Sobre la gestió del/la docent
- Sobre l'alumnat i el seu aprenentatge

Preparar aquesta observació, elaborant una pauta prèvia on s'estableixi què volem observar, és una tasca complexa però molt rellevant

Cap a una pauta d'observació



Activitat (previ)	Planificació de la gestió de l'activitat (prèvia)	Observació	Relació amb les competències	Aspectes a millorar en aplicacions futures
Activitat 1:	Agrupament: Material: Durada: Objectiu: Docent: Alumnes: Docent: Posada en comú: Docent: Alumnes	Alumnes: - Docent:	Resolució de problemes: Raonament i prova: Connexions: Comunicació i representació: Gestió <u>socioemocional</u> :	Pel que fa al plantejament: Pel que fa a la gestió:

Inici graella d'observació de la gestió d'una activitat (escola andorrana)

INICI D'UNA GRAELLA OBSERVACIÓ

A	B	C
Seqüència de l'activitat	Gestió de la classe (accions del professor)	Pautes per a l'observació (accions per observar com aprenen els alumnes)
1. Formeu tots els grups que pugueu amb els quatre colors prenent cada vegada dos colors i indiqueu quants grups trobeu. <i>Us manca informació per poder respondre la pregunta?</i> . Expliqueu- ho.	Explicar l'objectiu de l'activitat: <i>resoldre un problema de genètica molecular</i> . Repartir la fitxa i els multicubs. Formar grups heterogenis de 3 (el professor els porta pensats) i escollir el portaveu (cada equip tria el seu portaveu). Preveure uns minuts perquè manipulin i espera que surtin les dues preguntes: " <i>podem repetir el color?</i> " i " <i>importa l'ordre en que posem els colors?</i> "	<ul style="list-style-type: none"> - La formulació del problema és clara i entenedora per als alumnes. - La pregunta és d'interès per tots els membres de l'equip. - Els grups de treball entren en conflicte davant la pregunta, consensuen la resposta i la comuniquen argumentadament.
2. Per tant, concretem més: formeu tots els grups que pugueu amb els quatre colors prenent cada vegada dos colors suposant que <i>importa l'ordre</i> en què es col·loquin i que NO es poden <i>repetir</i> . Quants grups diferents obteniu?	<ul style="list-style-type: none"> - Assegurar-se que tots els alumnes entenen què vol dir que l'ordre importa (es pot connectar amb algun exemple quotidià) i que no es poden repetir. Acotar el temps (10 min) - Guiar els alumnes si és necessari, sense dir la resposta. 	<ul style="list-style-type: none"> - Com registren les agrupacions (representacions, de manera clara i entenedora). Veure si són sistemàtics i exhaustius. - Investiguen diferents estratègies per trobar el nombre d'agrupacions. - Observar si: Cometen errors, si és així, quins? S'actua d'alguna manera?
3. Compareu el vostre resultat amb els dels altres equips. Esbrineu quines agrupacions falten i quines sobren de mode que tots els equips tingueu les mateixes. Com sabeu que no n'hi ha més?. Podríeu dir el criteri que heu utilitzat per obtenir-les?	<ul style="list-style-type: none"> - Posada en comú: Escriure una graella a la pissarra amb el nom dels grups i compartir les dades o projectar la graella prèviament feta. El portaveu explica com han trobat les agrupacions. - Consensuar el resultat definitiu i raonar-ho per escrit 	<ul style="list-style-type: none"> - Com comuniquen de forma explícita quin procés poden seguir per assegurar-se que no se n'han deixat cap (pensament exhaustiu). - Escolten les idees de la resta i n'aporten de pròpies.

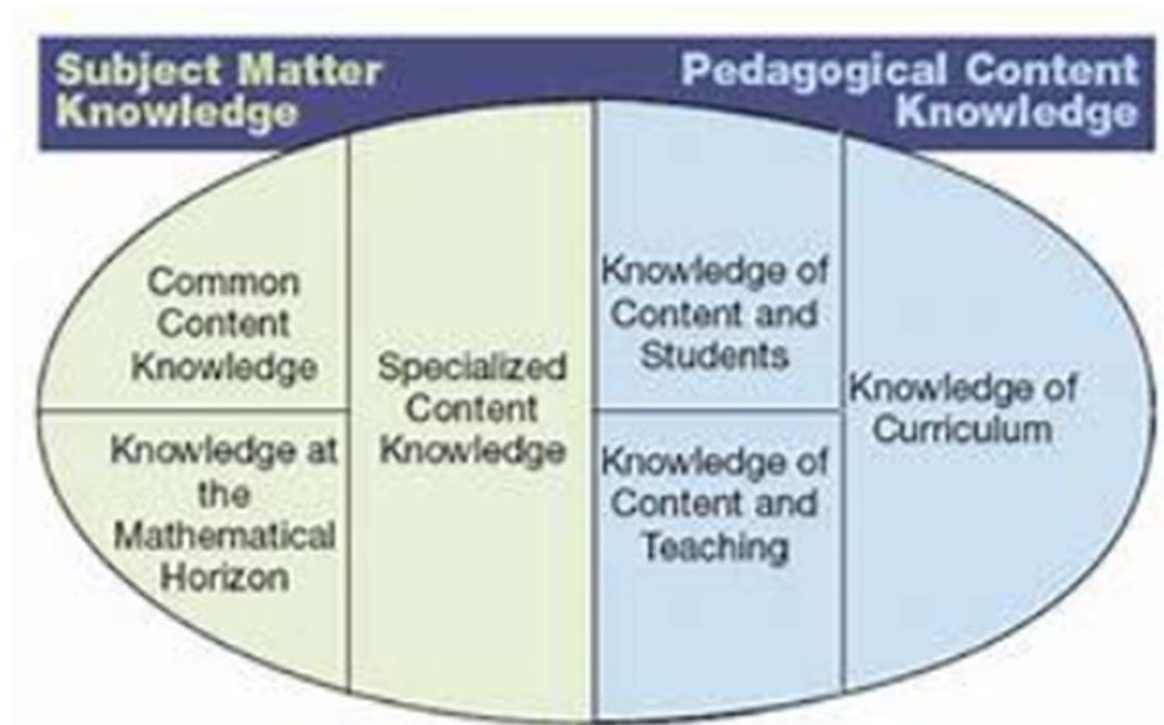
Com establir allò que volem observar?

Hi ha diversos models per analitzar la pràctica, i els coneixements que els docents han de mobilitzar. Cada model posa el focus en aspectes diferents. Alguns d'aquests models son:

- *Mathematics Knowledge for Teaching (MKT)*, D. Ball et al. (USA)
- *Knowledge Quartet (KQ)*, T. Rowland (UK)
- *Teaching for Robust Understanding TRU MATH*, A. Schoenfeld (USA)

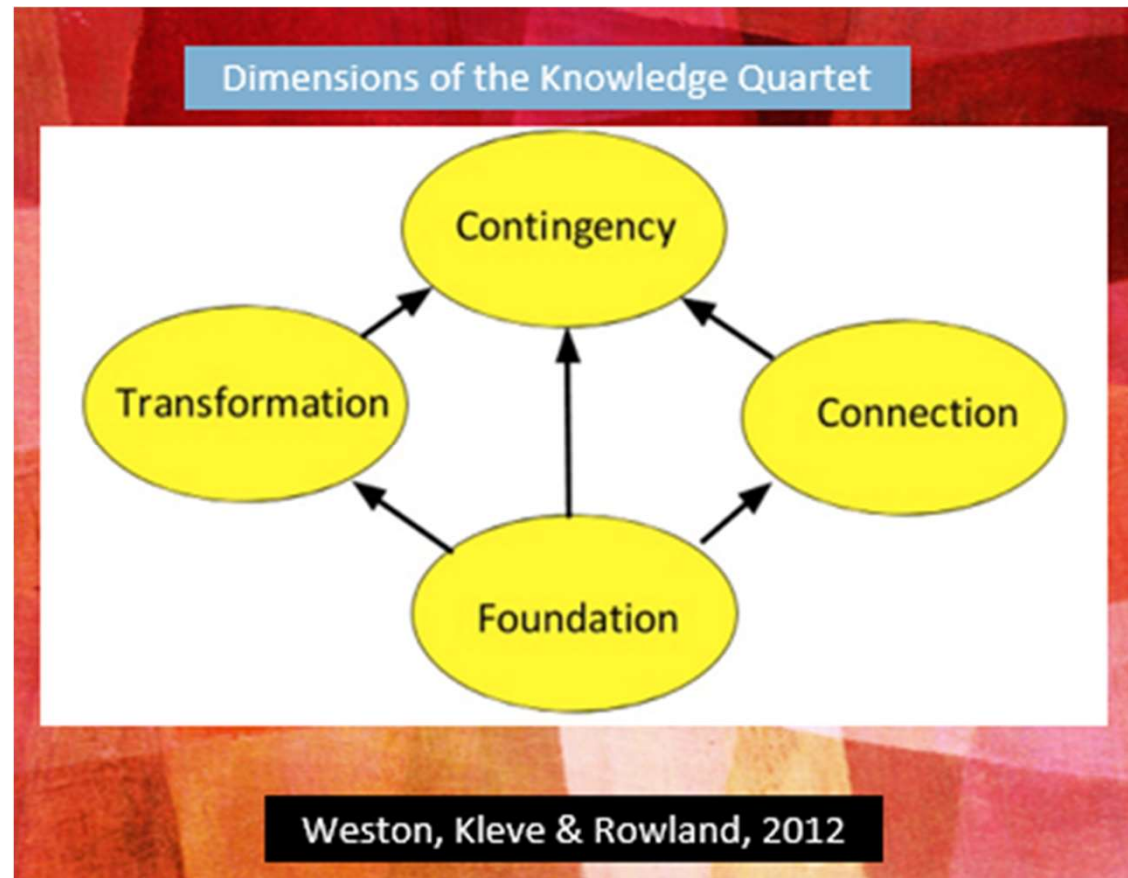
MKT

Mathematics Knowledge for Teaching (MKT)



MKT

Knowledge Quartet (KQ), T. Rowland (UK)



Teaching for Robust Understanding TRU MATH, A. Schoenfeld (USA)

Enfocament de les matemàtiques
(coherència i precisió)

Fonaments conceptuals

Demanda cognitiva

Desafiament intel·lectual

Accessibilitat

Activitats que conviden a participar a tothom

Agència, autoria i responsabilitat

Oportunitat de desenvolupar “veu pròpia”

Us de l'avaluació

Desafiament del raonament de l'alumnat

Qüestions relacionades amb la gestió del docent

- Motiva (o implica) a l'alumnat en l'activitat i/o les tasques
- Activa o exercita coneixements previs de l'alumnat
- Explica (activitat/tasques, conceptes, procediments, processos)
- Utilitza exemples (sobre conceptes, procediments o processos)
- Pregunta (en general, o bé a uns alumnes concrets)
- Proporciona ajudes concretes (amb preguntes o pistes)
- Accedeix a demandes de l'alumnat (responent o repreguntant)
- Utilitza els errors com a eina d'aprenentatge (o corregeix)
- Promou la discussió (en gran o en petit grup)
- Promou l'argumentació (en gran o petit grup -sense validar-)
- Avalua i proposa avaluar (de manera explícita o implícita)
- Realitza accions de retorn de les produccions de l'alumnat
- Gestiona contingències inesperades (les incorpora o les rebutja)

Qüestions relacionades amb l'aprenentatge de l'alumnat

Fan preguntes (a companys, al gran grup, al professor/a).

Expressen opinions sobre algun aspecte matemàtic.

Interactuen amb els companys (discussió, treball conjunt).

Resolen problemes (o troben respostes a preguntes).

Expressen dificultats / situacions de bloqueig (davant una tasca).

Demanen ajuda (a un company/a, al professor/a).

Expressen (verbal i/o per escrit) conjectures i les contrasten.

Realitzen argumentacions col·lectives (petit / gran grup).

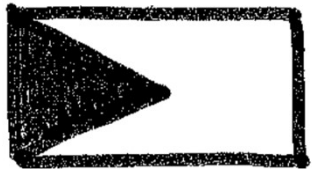
Expliquen per escrit (conceptes, procediments, processos, solucions).

Elaboren produccions individualment (especificar tipus).

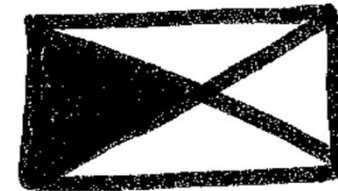
Elaboren produccions col·laborativament (parelles, petit o gran grup)

Entendre les idees dels alumnes (MKT) – Contingència (KQ)

A classe s'està corregint el següent exercici (introducció a les fraccions). Indica la fracció de la bandera que correspon a la part pintada en negre.



Un alumne surt a la pissarra, fa el següent dibuix, escriu la fracció $1/4$ i diu: "ja està, és un quart"



$$\frac{1}{4}$$

Immediatament intervé un altre alumne i s'estableix un petit diàleg:

Alumne: *Però si és un rectangle*

Mestra: *És igual que sigui un rectangle. El pots dividir igualment en quatre parts.*

Alumne: *Però no és un quadrat!*

Mestra: *El que passa és que les parts no són iguals. O potser sí? Són iguals? És gairebé com si fos un quadrat.*

Entendre la lògica dels alumnes quan s'equivoquen

Els errors poden tenir diferents orígens:

- Complexitat de les matemàtiques (errors reproduïts en la història) **Epistèmics**
- Complexitat cognitiva (falta d'adequació de la qüestió a l'alumnat) **Cognitius**
- A partir d'una situació, una pràctica o una explicació inadequada **Didàctics**

En resoldre un problema aritmètic que requereix la realització de més d'una operació, un alumne ha escrit això:

$$24 + 9 = 33 - 7 = 26$$

A la pregunta del si el que ha escrit és correcte, respon que si i ho justifica.

Considereu que és un error rellevant?

Quin penseu que és l'origen del mateix?

Quines conseqüències té en el seu aprenentatge futur?

Tanquem el cicle:

**Anàlisi de l'observació i
propostes de millora**

Una cita per acabar

Un professor (de matemàtiques) té una gran oportunitat. Si dedica el temps a exercitar els alumnes amb operacions rutinàries, matarà en ells l'interès, impedirà el seu desenvolupament intel·lectual i acabarà desaprofitant la seva oportunitat. Però, si posa a prova la curiositat dels seus alumnes plantejant-los problemes adequats i els ajuda a resoldre'ls amb preguntes estimulants, podrà despertar-los el gust pel pensament independent i proporcionar-los certs recursos.

George Polya, 1945



Moltes gràcies

jordi.deulofeu@uab.cat

Lleida, 3 de febrer de 2024