

Contagis, vacunes i xarxes

Models matemàtics per entendre la propagació de malalties

Martí Cuquet
INS Antoni Cumella (Granollers)

Jornada Lleimat 2024
3 de febrer de 2024



El taller

1. Presentació de l'activitat
2. Quanta gent cal vacunar?
3. Què hem treballat?

1. Presentació de l'activitat





Grup ReMA

Què podem aprendre de la recerca en didàctica de les matemàtiques?

Quines activitats podem dissenyar i portar a l'aula que segueixin les recomanacions de la recerca?

[Resolució de problemes](#)

[Bases d'orientació en la RP](#)

[L'avaluació de la RP](#)

[Problemes de Fermi](#)

[Agrupacions per nivell](#)

[Freudenthal i contextos realistes](#)

[Bones activitats per a la transició primària-secundària](#)

[El laboratori de matemàtiques](#)

[La pràctica de l'evocació](#)

[Videojocs a l'aula de matemàtiques](#)

[La perspectiva de gènere](#)

[L'escriptura matemàtica](#)

[Matemàtiques als projectes STEM](#)

Venn Diagrams of Tomatoes
Xavier Isusquiza Casellas
Col·legi Claret
Fotografia matemàtica (2021)



Contextos realistes a l'aula de matemàtiques

“L'aprenentatge de les matemàtiques hauria d'estar connectat a les experiències reals dels alumnes.”

Freudenthal

Cambridge Espresso #18: Using realistic contexts in mathematics

<https://www.cambridgemaths.org/for-teachers-and-practitioners/espresso/view/using-realistic-contexts-in-mathematics/>

- Més interès en les matemàtiques.
- Desenvolupament de la competència matemàtica
- Millora de les estratègies informals i de resolució de problemes
- Augment de la discussió a classe i de la creació de significat
- Context com a eina de motivació

Punt de partida

Grup ReMA <https://grup-rema.github.io/>

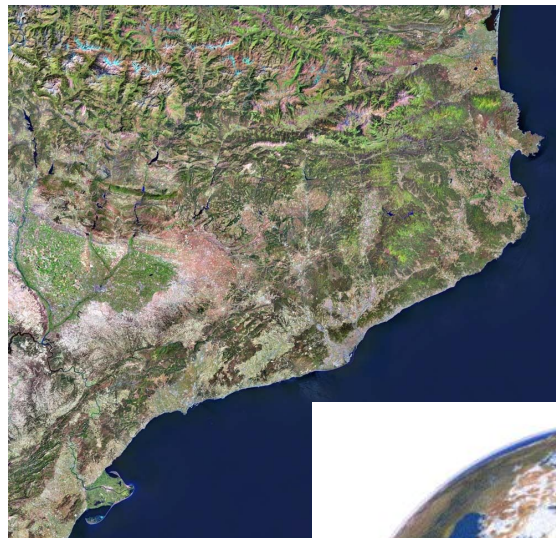
NRich – Disease Dynamics <https://nrich.maths.org/epidemic>

- Com creix una epidèmia?
- Podem fer-ne models simples?
- Quines limitacions tenen?
- Com ens protegeixen les vacunes?
- A partir de quin llindar podem frenar qualsevol brot?

Seqüència d'activitats

- 1. La malaltia d'alçar-se. El model exponencial.**
2. El nombre de reproducció R_0 .
3. Epidèmia en xarxa. Xarxes per modelitzar contagis.
4. Vacunació i distanciament. Llindar de vacunació.





?

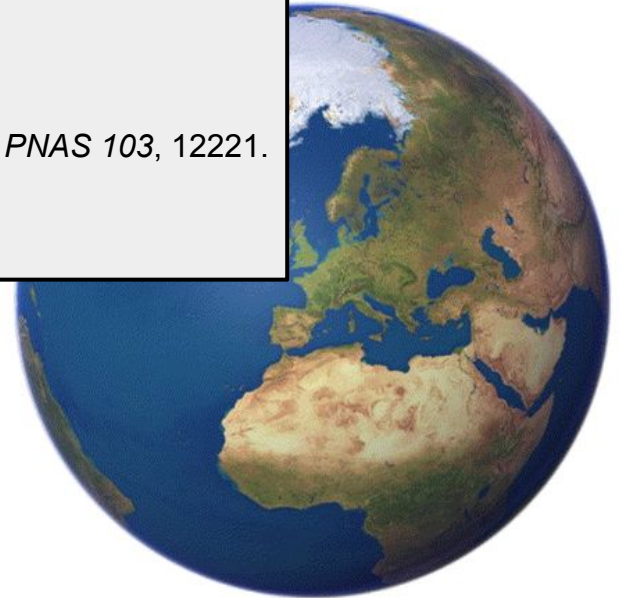


- Quants passos (o dies) calen per infectar tota la classe?
- Es tracta d'una relació proporcional? Pots explicar per què?
- Quants passos caldrien per infectar tot l'institut? I tota la ciutat, el país o el món? Explica com determines o fas una estimació de la quantitat de gent a l'institut, la ciutat, el país i el món.
- Si canviem la persona inicial que estava infectada, obtindríem el mateix resultat? (És a dir, es necessitaria el mateix nombre de passos)?
- I si cada nou infectat pot infectar a 3 o 4 companys, en comptes de 2? Què canviaria?
- Aquest és un model molt simple de propagació d'una malaltia i té algunes limitacions. Se te n'acut alguna?



“Eyebrows were raised when the Center for Disease Control's model forecast a potential 77 trillion cases if the epidemic went unchecked.”

Ben Cooper (2006). [“Poxy models and rash decisions”](#), *PNAS* 103, 12221.

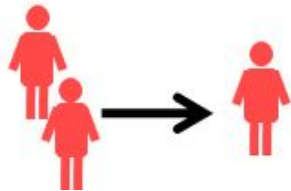


Seqüència d'activitats

1. La malaltia d'alçar-se. El model exponencial.
- 2. El nombre de reproducció R_0 .**
3. Epidèmia en xarxa. Xarxes per modelitzar contagis.
4. Vacunació i distanciament. Llindar de vacunació.

$$R_0 < 1$$

Cases **decrease** each step



$$R_0 > 1$$

Cases **increase** each step



Xarampió, Ràbia, Grip, Varicel·la, Ebola, Tos ferina, COVID-19

Xarampió, Ràbia, Grip, Varicel·la, Ebola, Tos ferina, COVID-19

Ràbia (0)

Grip (1–2)

Ebola (1,5–2,5)

Varicel·la (8–9)

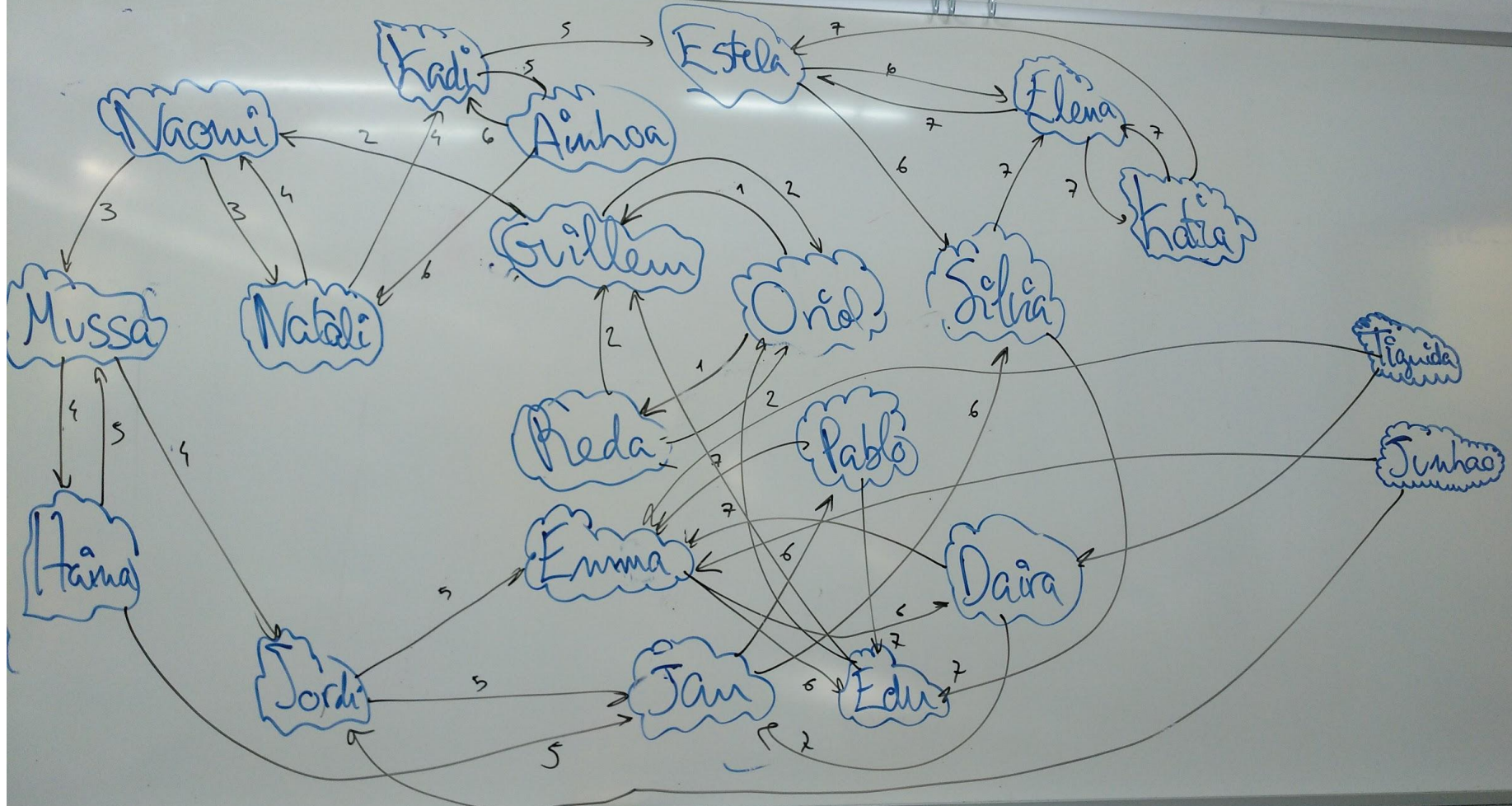
Tos ferina (12–17)

Xarampió (12–18)

Seqüència d'activitats

1. La malaltia d'alçar-se. El model exponencial.
2. El nombre de reproducció R_0 .
- 3. Epidèmia en xarxa. Xarxes per modelitzar contagis.**
4. Vacunació i distanciament. Llindar de vacunació.

1
2
3

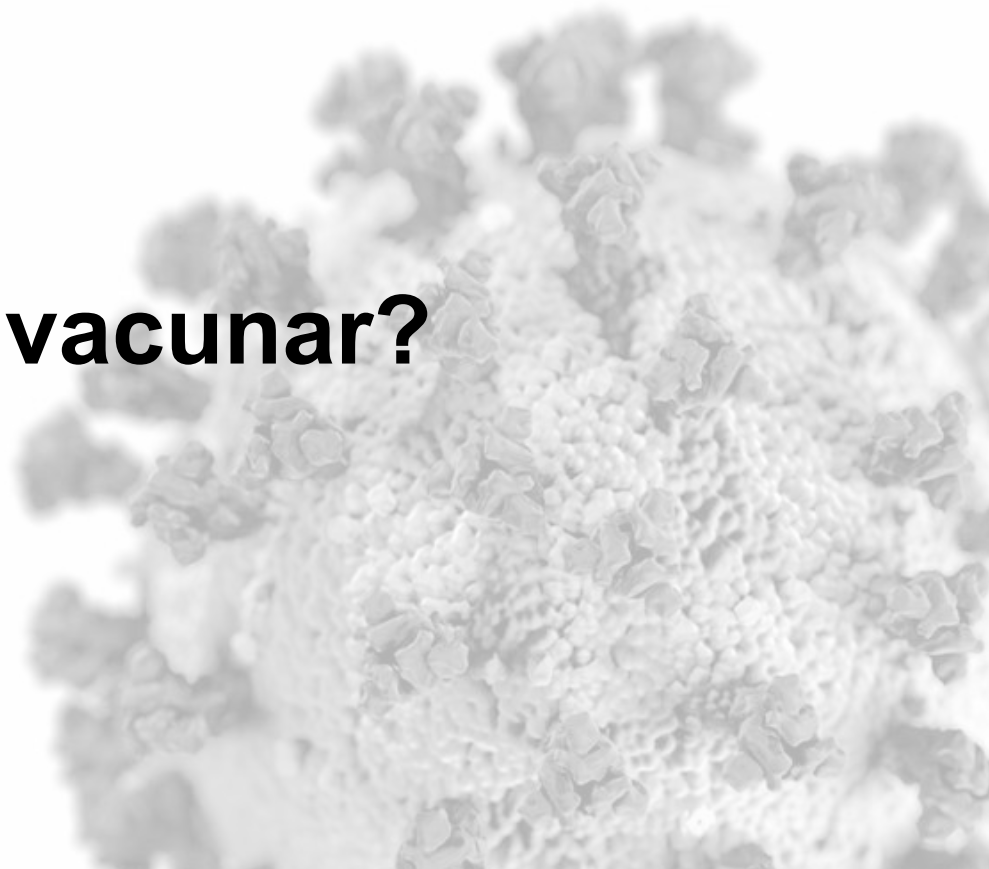




Seqüència d'activitats

1. La malaltia d'alçar-se. El model exponencial
2. El nombre de reproducció R_0 .
3. Epidèmia en xarxa. Xarxes per modelitzar contagis.
- 4. Vacunació i distanciament. Llindar de vacunació.**

2. Quanta gent cal vacunar?



2. Quanta gent cal vacunar?

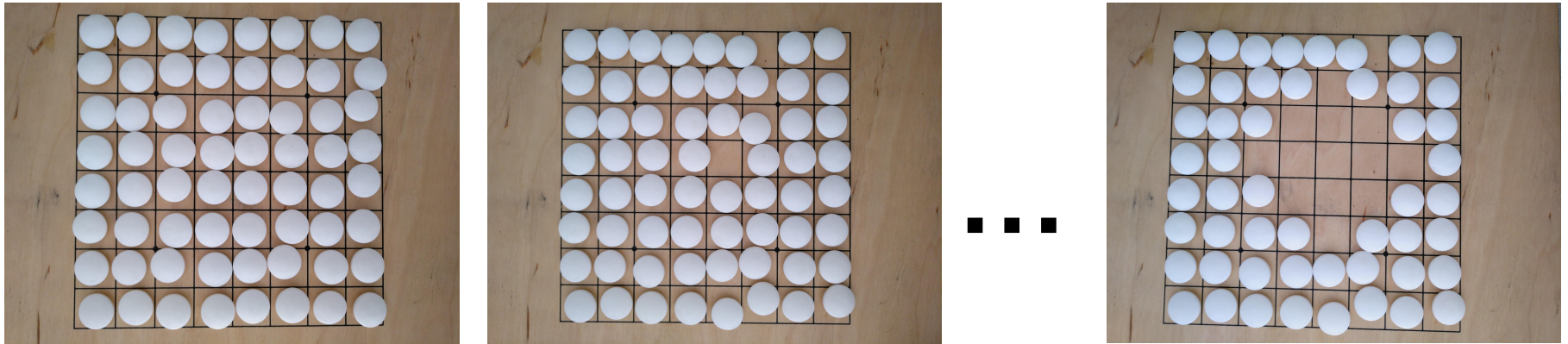
Material: tauler d'escacs o de go + 64 peces de dos colors diferents.



2. Quanta gent cal vacunar?

Regles:

- Seleccioneu una peça a l'atzar.
- Cada dia, les persones infectades infecten els seus veïns.

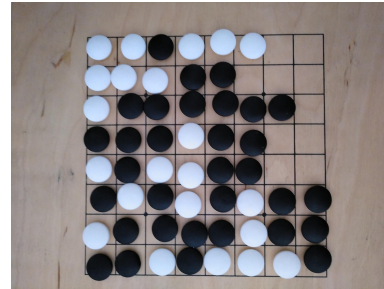
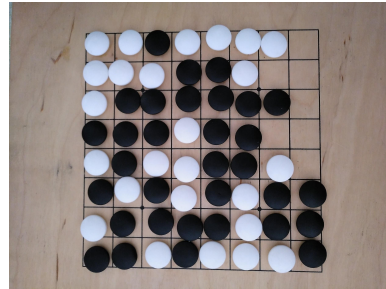
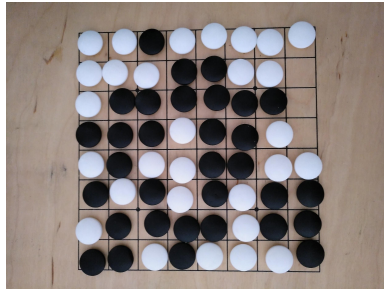
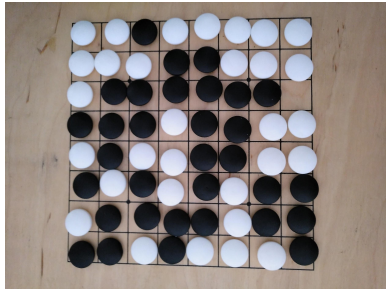


Registreu les dades en forma de taula i representeu-les en un gràfic.

2. Quanta gent cal vacunar?

Regles:

- Escolliu 32 peces de cada color i repartiu-les a l'atzar pel tauler.
- Un color són les peces no vacunades (susceptibles) i l'altre les vacunades.
- Seleccioneu una peça a l'atzar d'entre les susceptibles.
- Cada dia, les persones infectades infecten els seus veïns susceptibles.



Registreu les dades en forma de taula i representeu-les en un gràfic.

Persones vacunades	Persones susceptibles	Proporció de persones susceptibles	Percentatge de persones susceptibles	Dies fins al final de la infecció	Nombre total d'infectades	Proporció d'infectades respecte el total de susceptibles	Percentatge d'infectades respecte el total de susceptibles
32	32	1/2	50%

3. Què hem treballat?



Processos matemàtics

Què entenem per «blocs competencials» (*aka* dimensions)?

Resolució de problemes

Raonament i prova

Connexions

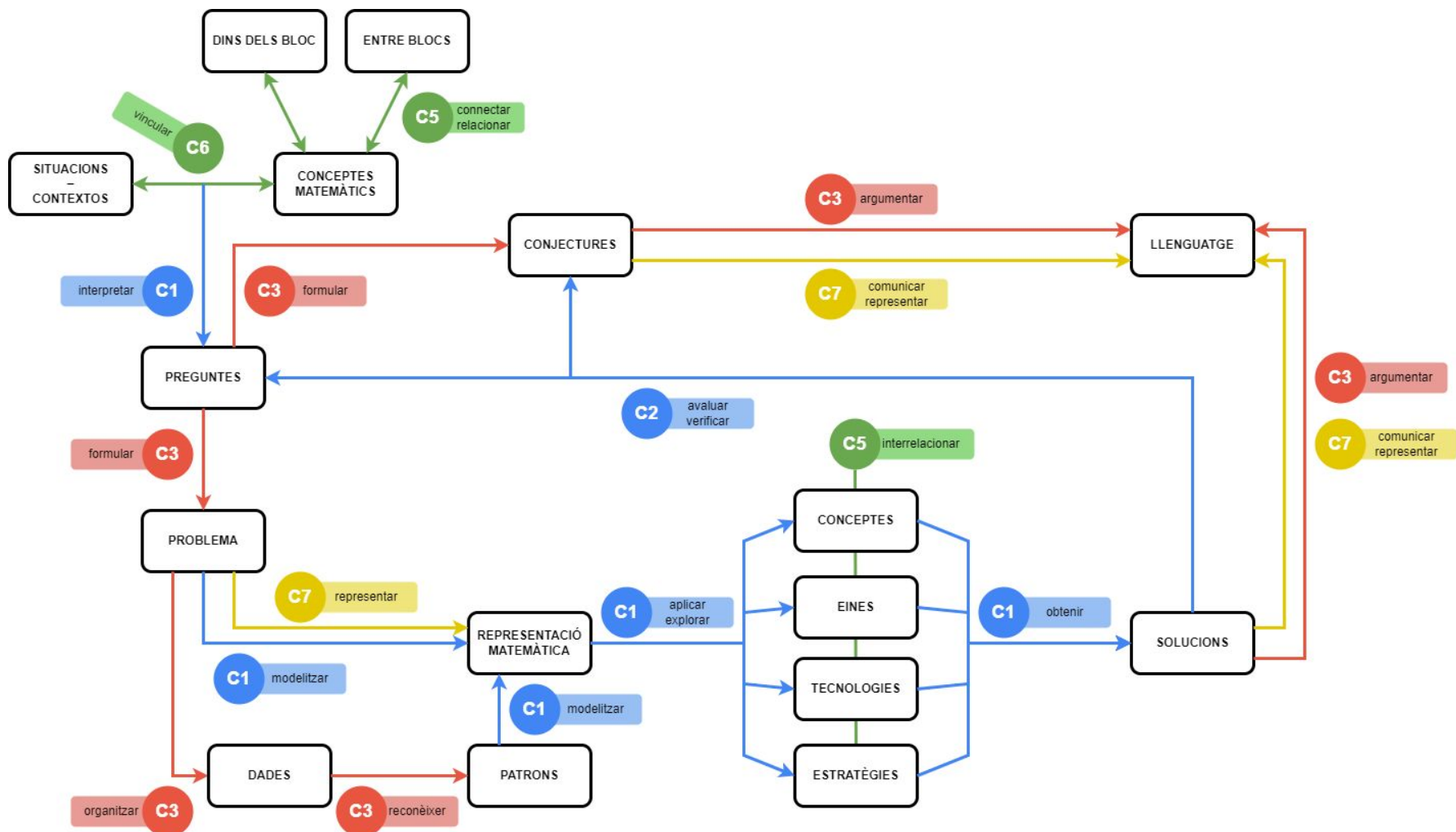
Comunicació

Representació

Processos matemàtics → *Fer matemàtiques!*

National Council of Teachers of Mathematics (2000).
Principles and Standards for School Mathematics.

[Traducció al castellà de la SAEM Thales.](#)



Què hem treballat?

Interpretar i modelitzar situacions.

Aplicar i explorar conceptes, eines i estratègies diverses: taules, gràfics, proporcionalitat, potències, progressions...

Utilitzar l'argumentació i el raonament. Utilitzar eines tecnològiques.

Organitzar dades. Reconèixer patrons.

Connectar i relacionar conceptes: d'un mateix bloc, entre blocs.

Vincular i contextualitzar matemàtiques i altres àrees de coneixement.

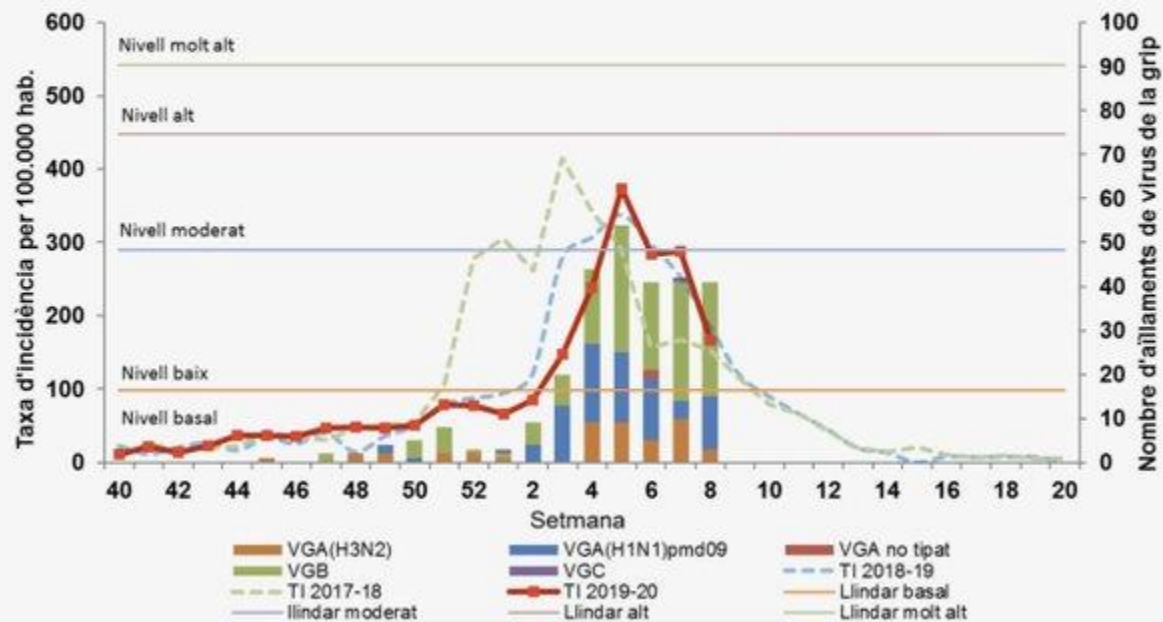
Desenvolupar capacitat crítica.

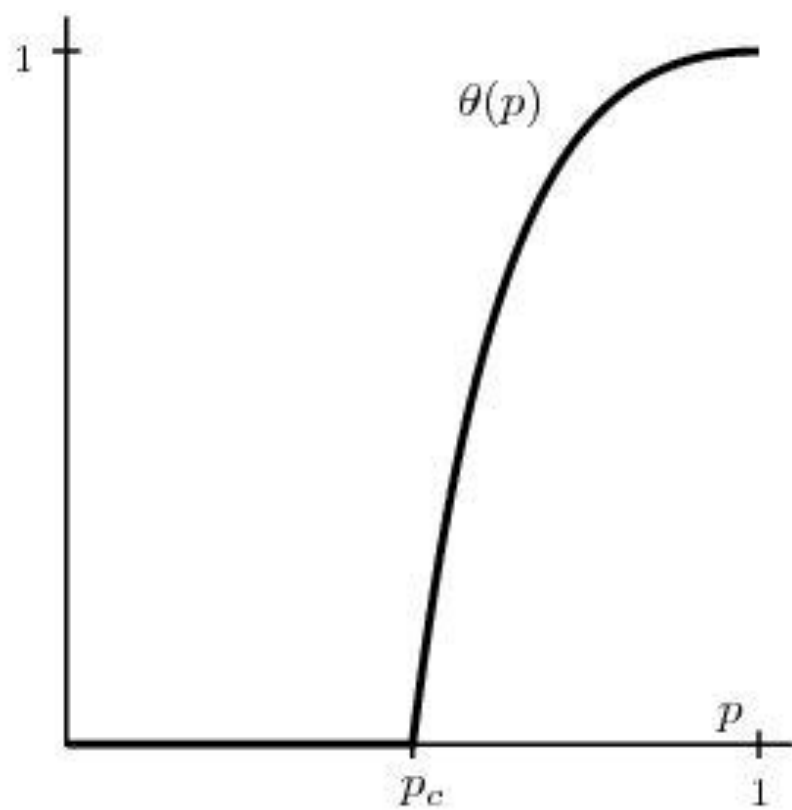
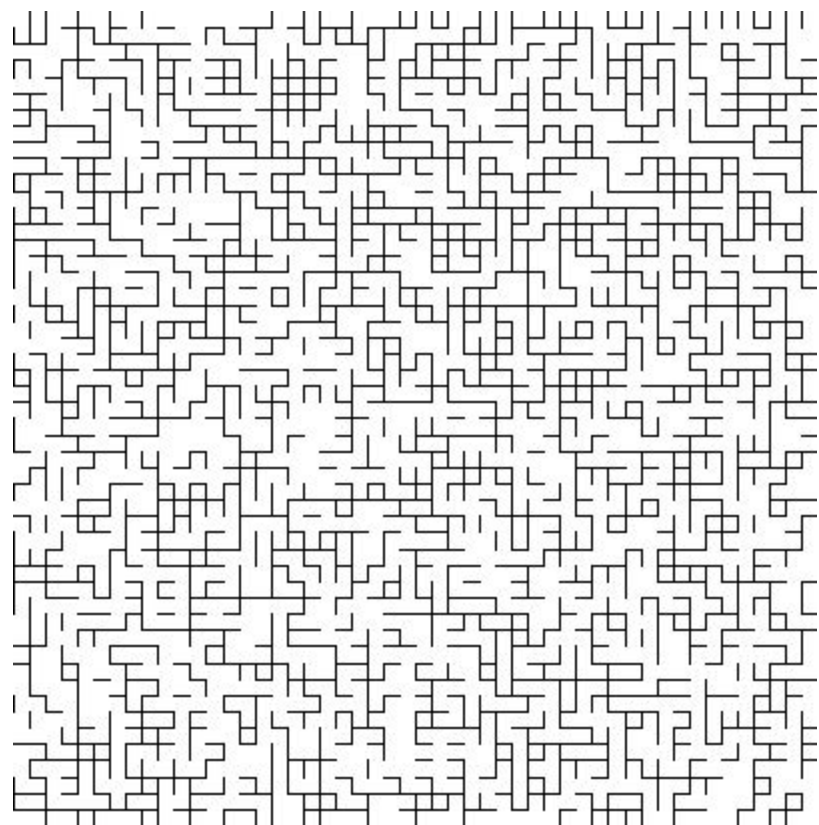
Representar el problema usant el llenguatge matemàtic: taules, gràfics, llenguatge...

Comunicar i representar procediments i resultats.



Figura 1: Taxa d'incidència de síndrome gripal i nombre d'aïllaments de virus de la grip. Dades procedents de la xarxa sentinella. Setmana 40 (2019) - 20 (2020). Catalunya, 2020





6. En els models matemàtics que s'utilitzen per a descriure l'evolució d'una malaltia, s'anomena R_0 el nombre mitjà de noves infeccions que cada persona infectada provoca en la població. Quan aquest nombre és inferior a 1, cada individu infectat transmet la malaltia, de mitjana, a menys d'una persona i la malaltia tendeix a desaparèixer. En canvi, si R_0 és més gran que 1, la malaltia s'estén i es produeix una epidèmia.

Quan es descobreix una vacuna efectiva contra la malaltia, es pot controlar l'epidèmia vacunant només una proporció p de la població. És el que es coneix com a *immunitat de grup*. Efectivament, un cop vacunada una proporció $p \in (0, 1)$ de la població, la nova R_0 , que s'anomena *efectiva* i es denota amb R_e , és el producte de la R_0 original per la proporció d'individus que no estan vacunats, $1 - p$. I s'aconsegueix controlar l'epidèmia si la R_e és inferior a 1.

- a) En el cas del xarampió, s'estima que $R_0 = 15$. Si analitzem una població amb un percentatge d'individus vacunats del 95 %, segons el model descrit, hi ha risc que es produeixi una epidèmia de xarampió en aquesta població?

[0,75 punts]

- b) En el cas concret de l'anomenada *grip espanyola* del 1918, s'estima que $R_0 = 4$. Calculeu quin percentatge de població hauria calgut vacunar, com a mínim, per a aturar l'epidèmia d'aquesta malaltia.

[0,75 punts]

- c) Expresseu, en general, el llindar de població mínima que cal vacunar en funció del valor R_0 d'una malaltia. Feu un esbós d'aquesta funció per als valors de R_0 entre 1 i 20.

[1 punt]

*Moltes gràcies!
Seguim caminant!*

Martí Cuquet

✉ mcuquet2@xtec.cat

✂ [@mcuquet](https://twitter.com/mcuquet)

🌐 mcuquet.github.io

Més enllà de la recta
Sergio Martínez Vinagre
Institut La Serra
Fotografia matemàtica (2018)



2018-04-06 12:42